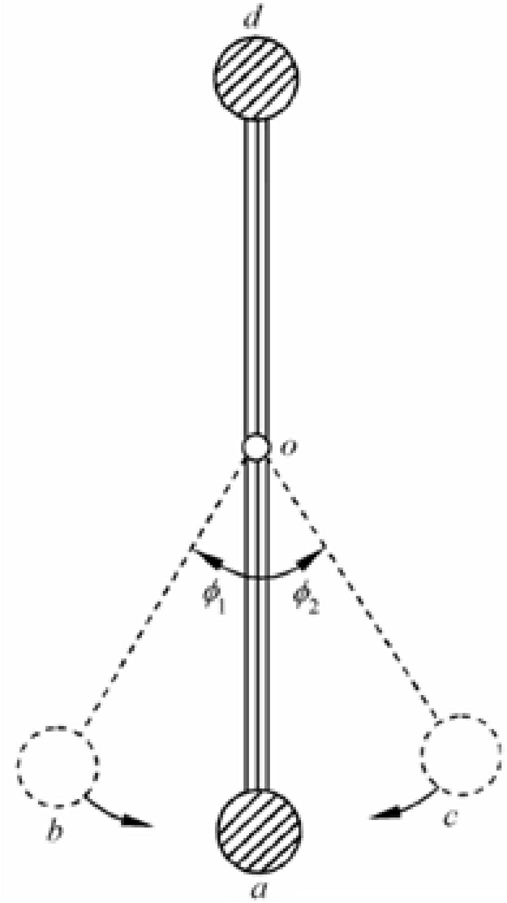
3-5 线性系统稳定性分析

1.稳定性的基本概念

任何系统在扰动作用下都会偏离原平
偏差。所谓稳定性，是指系统在扰动
差状态恢复到原平衡状态的能力。



a点为稳定平衡点

d点为不稳定平衡点

大范围稳定的系统：

不论扰动引起的初始偏差有多大，当扰动消失后，系统都能以足够的准确度恢复到原平衡状态，则称该系统为大范围稳定的系统。

小范围稳定的系统：

当扰动引起的初始偏差小于某一范围时，扰动消失后，系统才能恢复到原平衡状态，否则不能恢复到原平衡状态，则称该系统为小范围稳定的系统。

稳定的线性系统，都是大范围稳定的系统。

非线性系统才存在小范围稳定而大范围不稳定的情况。

二、系统稳定的充要条件：

闭环极点严格位于S左半平面。

对线性定常系统，零初始条件下，若其脉冲响应收敛，则系统稳定，否则不稳定。

$$C(s)=\Phi(s)\cdot 1=\frac{b_m s^m+\cdots+b_0}{\prod_{j=1}^{n_1}(s-s_j)\prod_{k=1}^{n_2}(s^2+2\zeta_k\omega_{nk}s+\omega_{nk}^2)}$$

$$=\sum_{j=1}^{n_1}\frac{A_j}{s-p_j}+\sum_{k=1}^{n_2}\frac{B_k s+C_k}{s^2+2\zeta_k\omega_{nk}s+\omega_{nk}^2}$$

$$\therefore c(t)=\sum_{j=1}^{n_1}A_j e^{s_j t}+\sum_{k=1}^{n_2}B_k' e^{-\sigma_k t}\sin(\omega_{dk}t+\beta_k)$$

即单位脉冲响应为：

$$\therefore c(t)=\sum_{j=1}^{n_1}A_j e^{s_j t}+\sum_{k=1}^{n_2}B_k^{'}e^{-\sigma_k t}\sin(\omega_{dk}t+\beta_k)$$

$\Updownarrow$ 系统稳定

$$\lim_{t\to\infty}c(t)=0$$

$\Updownarrow$

综上所述，要判断一个系统是否稳定，取决于系统的全部特征根。课本P110 下部

线性系统稳定的充要条件：闭环系统特征方程的所有根均具有负实部；或者说，闭环传递函数的极点均位于左半s平面。

3.劳思稳定判据 $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$

(1)系统稳定的**必要条件**是特征方程的所有系数$a_i>0$均大于零。

若不满足系统必定不稳定，若满足系统未必稳定。

(2)**列劳思表**

线性系统稳定的**充要条件**是**劳思表中第一列所有项系数均大于零。**

第一列中系数符号变化次数为极点在s右半平面的个数。

劳斯表的列法

特征方程为：$D(s)=a_5s^5+a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s^1+a_0$

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 \\
s^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^3 & \dfrac{a_4a_3-a_5a_2}{a_4}=b_1 & \dfrac{a_4a_1-a_5a_0}{a_4}=b_2 & 0 \\
s^2 & \dfrac{b_1a_2-a_4b_2}{b_1}=c_1 & a_0 & \\
s^1 & \dfrac{c_1b_2-b_1a_0}{c_1}=d_1 & 0 & \\
s^0 & a_0 & &
\end{array}
$$

例题3-7 $D(s)=s^4+2s^3+3s^2+4s+5=0$，判定稳定性及在右半平面根的个数。

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	$\frac{2\times3-1\times4}{2}=1$	$\frac{2\times5-1\times0}{2}=5$	
s^1	$\frac{1\times4-2\times5}{1}=-6$	0	
s^0	5		

系统不稳定，劳斯表第一列变号两次，有两个闭极点在s右半平面。

4、劳思判据特殊情况

1、某行首元素为0，其余元素不全为0

①乘因子 (s+a)，a为任意正数。

②以无穷小的整数ε替代。

例题2：$D(s)=s^3-3s+2=0$，判定s右半平面的闭环根的个数。

s^3	1	-3
s^2	0	2
s^1	∞	
s^0		

s^3	1	-3
s^2	(0)ε	2
s^1	(-3ε-2)/ε	
s^0	2	

为负数，故系统有两个s右半平面的根

2、在劳斯阵列表中，出现全零行，则表明在s平面**存在关于原点对称的特征根**（如一对符号相反的实根、一对共轭纯虚根或关于实轴对称的两对共轭复根）。

解决办法：

由全零行的上一行构筑辅助方程，将辅助方程导方程的系数替代全零行继续计算。

由辅助方程可求得关于原点对称的特征根。

看P113 例题3-8

补例：用劳斯判据分析系统的稳定性。

$$s^5+s^4+3s^3+3s^2+2s+2=0$$

解：

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 3 & 2 \\
s^4 & 1 & 3 & 2 \\
s^3 & 0 & 0 & \\
s^2 & & & \\
s^1 & & & \\
s^0 & & &
\end{array}$$

全0行

由 $Q(s)=s^4+3s^2+2=(s^2+1)(s^2+2)=0$

得关于原点对称的根为：$\pm j,\ \pm\sqrt{2}j$

系统特征根为：$\pm j,\ \pm\sqrt{2}j,\quad -1$

5、劳思判据的应用

①判定稳定性，确定正根的个数

②确定是系统稳定的参数取值范围

③确定系统具有**给定稳定度**时的参数取值范围

给定稳定度：

虚轴是系统的临界稳定边界，我们以最靠近虚轴的根到虚轴的距离 a 来定义系统的给定稳定度。

一般 a 越大系统的动态性能越好，稳定性越好。

确定系统具有给定稳定度的方法：

① 以$s=s_1-a$代入原特征方程，得到以s_1为变量的方程；

② 把劳斯判据应用于s_1方程；

③ 若满足稳定的充要条件，则原系统具有a的稳定度。

看P114
例题3-9

补例 单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.25s+1)}$$

①试确定使系统稳定的K的取值范围；

②试确定使系统具有a=1的给定稳定度时K的取值范围。

（确定使闭环极点全部位于s=-1垂线之左时K的范围）

解：①系统的特征方程为： $\boldsymbol{1+G_k(s)=0}$

$$s(0.1s+1)(0.25s+1)+K=0$$

即

$$s^3+14s^2+40s+40K=0$$

s^3	1	40
s^2	14	$40K$
s^1	$\dfrac{14\times 40-1\times 40K}{14}$	
s^0	$40K$	

由劳斯判据，系统稳定的充要条件是：

$$\begin{cases} K>0 \\ 14\times 40-1\times 40K>0 \end{cases}$$

使系统稳定的开环放大系数K的范围为：

$$0<K<14$$

② 系统特征方程为 $s^3+14s^2+40s+40K=0$

将$s=s_1-1$代入特征方程得：

$$(s_1-1)^3+14(s_1-1)^2+40(s_1-1)+40K=0$$

整理得：

$$s_1^{\ 3}+11s_1^{\ 2}+15s_1+(40K-27)=0$$

由劳斯判据得，系统稳定的充要条件是

$$\begin{cases} 40K-27>0 \\ 11\times 15-(40K-27)>0 \end{cases}$$

解方程得K的取值范围为：

$$0.675<K<4.8$$

作业

- 课本P134
- 3-9，3-10（1），3-12

3-6 线性系统的稳态误差计算

- 稳态误差是系统的稳态性能指标，是系统控制精度的度量。
- 计算系统的稳态误差以系统稳定为前提条件。

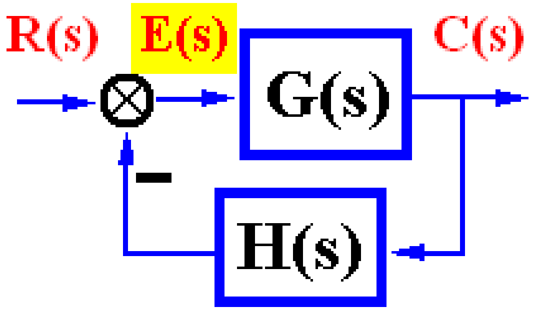
1、误差与稳态误差

●稳态误差的定义：

（1）从输入端定义：$e(t)=r(t)-b(t)$ $\quad\therefore \boldsymbol{e_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty} e(t)}$

（2）从输出端定义：$e'(t)=c_0(t)-c(t)$ $\quad\therefore e'_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty} e'(t)$

● 两种定义间的联系



按输入端定义的误差

$$E(s)=R(s)-H(s)C(s)$$

按输出端定义的误差

$$E'(s)=\frac{R(s)}{H(s)}-C(s)$$

$$E(s)=H(s)E'(s)$$

单位反馈时，二者相等

● 稳态误差计算的一般方法

（1）判定系统的稳定性

（2）求误差传递函数$\Phi_e(s)$

（3）求$E(s)=\Phi_e(s)R(s)$

（4）求e_{ss} 。利用终值定理求取。

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$

例3-10 设单位反馈系统开环传递函数为$G(s)=1/Ts$，输入信号分别为 1）$r(t)=t$， 2) $r(t)=t^2/2$，3) $r(t)=\sin\omega t$，求系统稳态误差。

解：误差传递函数为

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)H(s)}=\frac{Ts}{1+Ts}$$

1）$R(s)=\dfrac{1}{s^2},E(s)=\Phi_e(s)R(s)=\dfrac{T}{s(1+Ts)}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{T}{1+Ts}=T$$

2） $R(s)=\dfrac{1}{s^3}, E(s)=\Phi_e(s)R(s)=\dfrac{T}{s^2(1+Ts)}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s(1+Ts)}=\infty$$

3） $R(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}, E(s)=\dfrac{Ts}{1+Ts}\cdot\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=0$$

$$e(t)=-\frac{T\omega}{T^2\omega^2+1}e^{-\frac{t}{T}}+\frac{T\omega}{T^2\omega^2+1}\cos\omega t+\frac{T^2\omega^2}{T^2\omega^2+1}\sin\omega t$$

$e_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty} e(t)$不存在

❖**本题说明：**

1）终值定理的使用是有限定条件的，P117中间式（3-54）上面一段：

sE(s)除在原点处有唯一的极点外，其余极点均在s左半平面。

2）稳态误差与输入有关。

2、 系统类型

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}s\,E(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(S)}{1+G(s)H(s)}$$

影响稳态误差的因素：开环传函、输入信号。

❑根据开环传函对系统跟踪输入信号的能力进行分类如下。

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(1+\tau_i s)}{s^{\nu}\prod_{j=1}^{n-\nu}(1+T_j s)}=\frac{K}{s^{\nu}}G_0(s)H_0(s)$$

K：开环增益。

ν=0时：0 型系统。

ν=1时：I 型系统。

ν=2时：II 型系统。

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(S)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\lim\limits_{s\to 0}[s^{\nu+1}R(s)]}{K+\lim\limits_{s\to 0}s^{\nu}}$$

- 进一步而言，系统的稳态误差取决于系统的型别ν、开环增益K以及R(s)的形式。

3、阶跃输入下稳态误差及静态位置误差系数

$$r(t)=R\cdot 1(t),\qquad R(s)=\frac{R}{s}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{R}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)H(s)}$$

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)$$ 称为位置误差系数

于是 $$e_{ss}=\frac{R}{1+K_p}$$

P119 式（3-58）、（3-59）

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^{\nu}}G_0(s)H_0(s)$$

$$\left.\begin{array}{lll} 0\text{型系统}, & K_p=K, & e_{ss}=\dfrac{R}{1+K} \\ \mathrm{I}\text{ 型系统}, & K_p=\infty, & e_{ss}=0 \\ \mathrm{II}\text{型系统}, & K_p=\infty, & e_{ss}=0 \end{array}\right\}$$

有差系统/零阶无差度系统

一阶无差度系统

二阶无差度系统

4、斜坡输入下的稳态误差及静态速度误差系数

$$r(t)=Rt\cdot 1(t),\qquad R(s)=\frac{R}{s^2}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{R}{s+sG(s)H(s)}=\frac{R}{\lim\limits_{s\to 0}sG(s)H(s)}$$

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)H(s)$$ 称为静态速度误差系数

于是 $$e_{ss}=\frac{R}{K_v}$$

P120 式（3-60）、（3-61）

5、加速度输入下的稳态误差及静态加速度误差系数

$$r(t)=\frac{1}{2}Rt^2\cdot 1(t),\qquad R(s)=\frac{R}{s^3}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{R}{\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)H(s)}$$

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)H(s)$$ 称为静态加速度误差系数

于是 $$e_{ss}=\frac{R}{K_a}$$

P121 式（3-63）、（3-64）

P122表3-5

1.系统的型别越高，跟踪典型输入信号的无差能力越强。

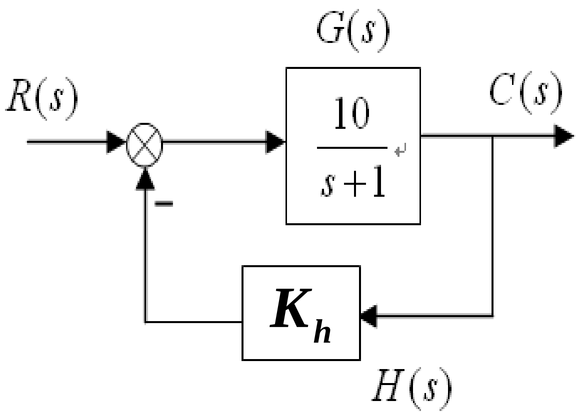
2.K_p，K_v，K_a的取值只有三种：0, K和 ∞ ,可表示系统对相应典型输入信号的跟踪能力。

3.e_{ss}的取值也只有三种：0、有限值和∞。

4.减小或消除误差的措施：提高ν、增大 K。

II	∞	∞	K	0	0	$\frac{a_0}{K}$
III	∞	∞	∞	0	0	0

例3-11 设控制系统如图所示，试求系统在给定信号 r(t)=1(t)作用下K_h为1和0.1时系统输出端的稳态误差 e'_{ss}



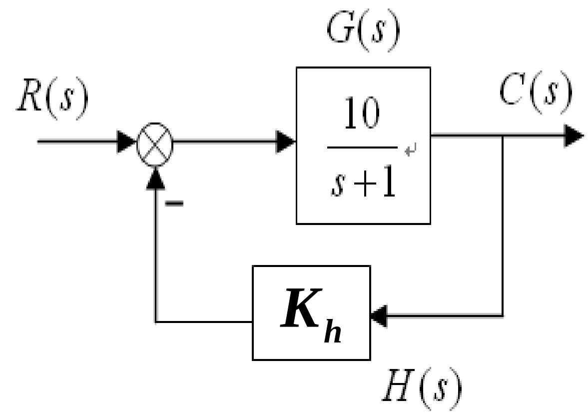
解：系统开环传递函数为：

$$G_K(s)=G(s)H(s)=\frac{10K_h}{s+1}$$

故系统为0型系统，系统特征方程为s+1+10K_h=0，K_h>-0.1时系统稳定。

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=10K_h \qquad e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{1+10K_h}$$

输出端的误差表达式为：



$$e_{ss}^{'} = \frac{e_{ss}}{K_h}$$

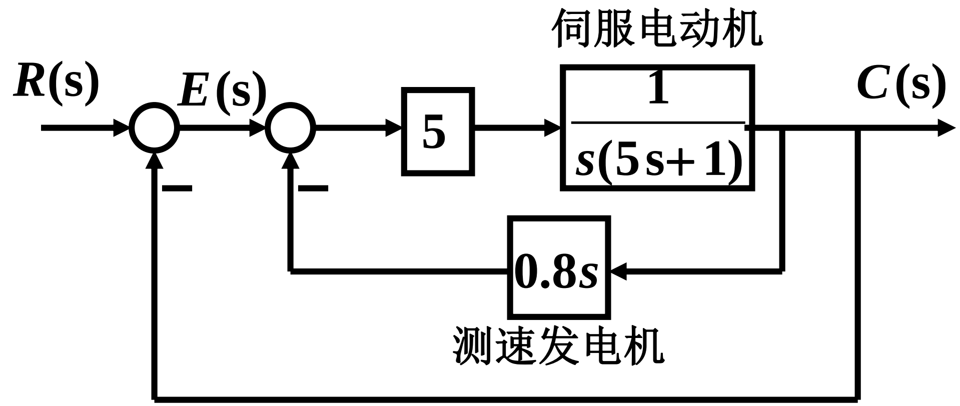
故当K_h=1时，

$$e_{ss}^{'} = \frac{e_{ss}}{K_h} = \frac{1}{K_h(1+10K_h)} = \frac{1}{11}$$

故当K_h=0.1时，

$$e_{ss}^{'} = \frac{e_{ss}}{K_h} = \frac{1}{K_h(1+10K_h)} = 5$$

例3-12 设具有测速发电机内反馈的位置随动系统如图所示，要求计算r(t)分别为1(t)、t、t²时，系统的稳态误差。



解：系统开环传递函数为

$$G_K(s)=\frac{\dfrac{5}{s(5s+1)}}{1+\dfrac{5}{s(5s+1)}\cdot 0.8s}=\frac{1}{s(s+1)}$$

显然系统稳定。

$$K_p=\lim_{s\to 0}G_K(s)=\infty \qquad e_{ss1}=\frac{1}{1+K_p}=0$$

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG_K(s)=1 \qquad e_{ss2}=\frac{1}{K_v}=1$$

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G_K(s)=0 \qquad e_{ss3}=\frac{2}{K_a}=\infty$$

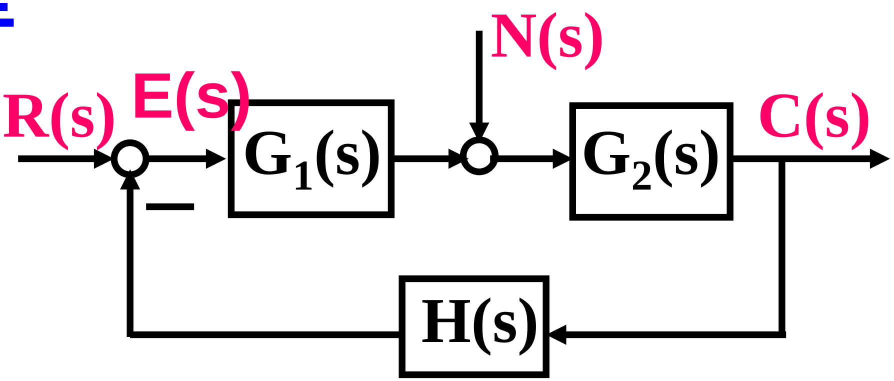
P123上面第三段:

应当指出，在系统误差分析中，只有当输入信号是阶跃函数、斜坡函数和加速度函数，或者这三种函数的线性组合时，静态误差系数才有意义。

因此，当系统输入信号为其他形式函数时，静态误差系数法便无法应用。

当求扰动作用下的稳态误差时，亦无法使用。

6、扰动作用下的稳态误差



（1）输入端定义

$$E_n(s)=\Phi_{en}(s)\cdot N(s)$$

$$e_{ssn}=\lim_{s\to 0} sE_n(s)$$

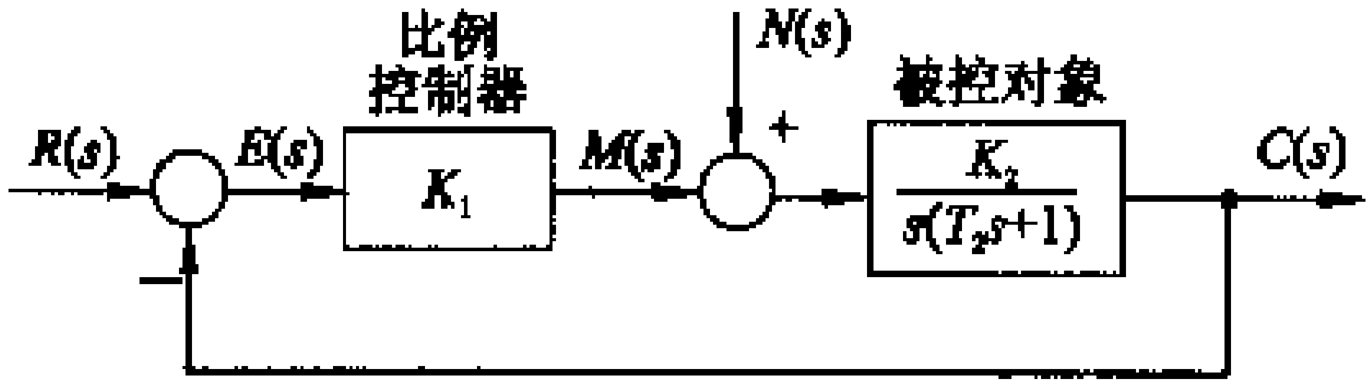
（2）输出端定义

$$E'_n(s)=C_{希}-C_{实}=-C_n(s)$$

$$e'_{ssn}=\lim_{s\to 0}-sC_n(s)$$

因为作用点不同，即使R(s)与N(s)相同，其引起的稳态误差一般不相同。

例3-13 设比例控制系统如图3-34。



$R(s)=R_0/s,\ N(s)=n_0/s$ 试求系统的稳态误差。

思路/步骤：1. 判稳

2. 求e_{ssr}

3. 求e_{ssn}

4. 求$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}$

作业

- 课本P127：
- 3-13（2）
- 3-15