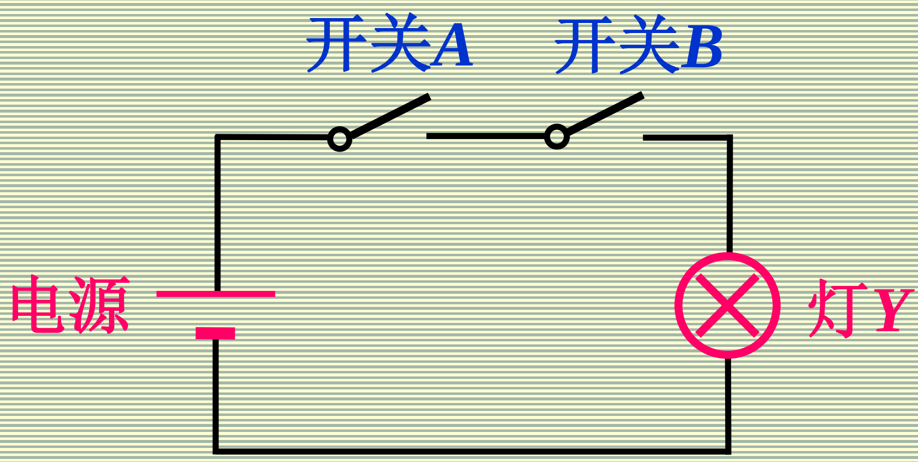
1.1 基本概念、公式和定理

1.1.1 基本和常用逻辑运算

一、三种基本逻辑运算

1. 与逻辑： 当决定一事件的所有条件都具备时，事件才发生的逻辑关系。



与逻辑关系

功能表

A	B	Y
断	断	灭
断	合	灭
合	断	灭
合	合	亮

与逻辑的表示方法：

真值表 (Truth table)

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

设定变量

状态赋值

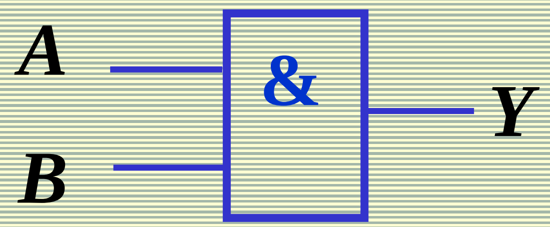
功能表

A	B	Y
断	断	灭
断	合	灭
合	断	灭
合	合	亮

逻辑函数式

$$Y = A \cdot B = AB$$

逻辑符号



与门 (AND gate)

2. 或逻辑：

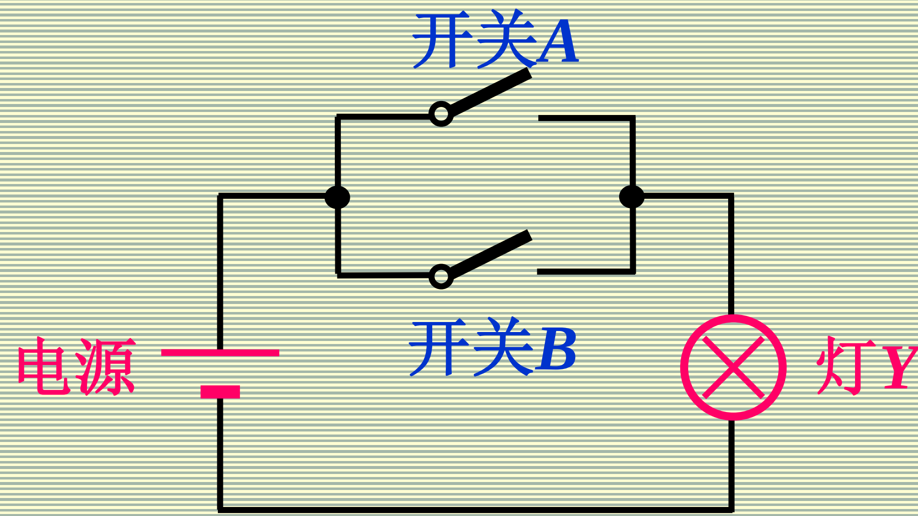
决定一事件的诸条件中，只要有一个或一个以上具备时，事件就会发生的逻辑关系。

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

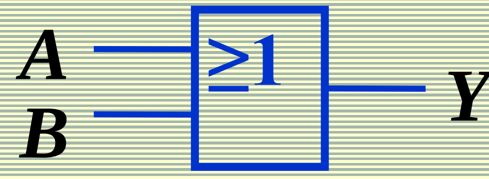
逻辑函数式

$$Y = A + B$$



或逻辑关系

逻辑符号



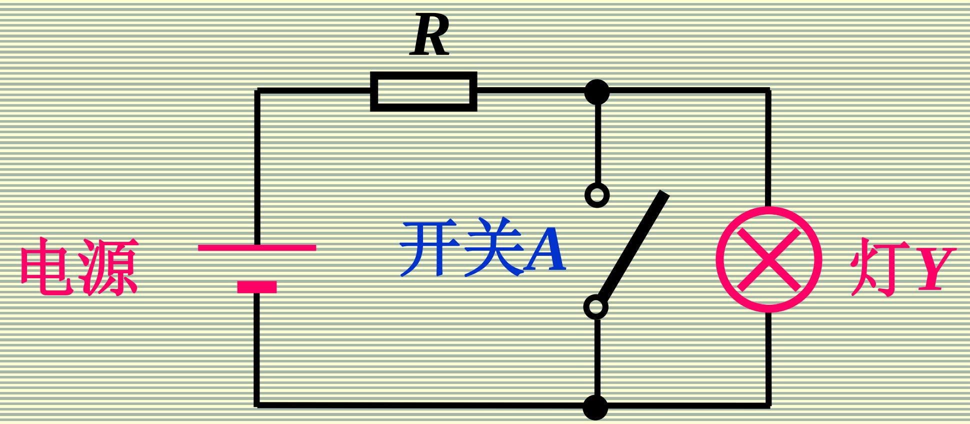
或门（OR gate）

3. 非逻辑：

只要条件具备，事件便不会发生；条件不具备，事件一定发生的逻辑关系。

真值表

A	Y
0	1
1	0

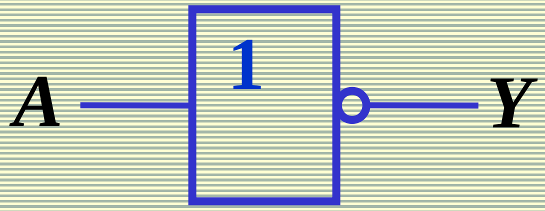


非逻辑关系

逻辑函数式

$$Y = \overline{A}$$

逻辑符号



非门 (NOT gate)

二、逻辑变量与逻辑函数及常用复合逻辑运算

1. 逻辑变量与逻辑函数

逻辑变量： 在逻辑代数中，用英文字母表示的变量称为逻辑变量。在二值逻辑中，变量的取值不是 1 就是 0 。

原变量和反变量： 字母上面无反号的称为原变量，有反号的叫做反变量。

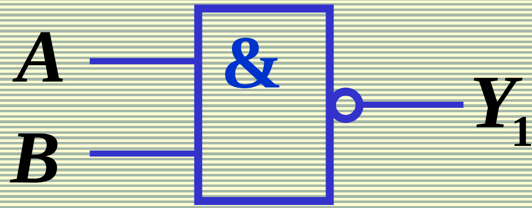
逻辑函数： 如果输入逻辑变量 A、B、$C\cdots$的取值确定之后，输出逻辑变量 Y 的值也被唯一确定，则称 Y 是 A、B、$C\cdots$的逻辑函数。并记作 $Y=F(A,B,C\cdots)$

2. 几种常用复合逻辑运算

(1) 与非逻辑

(NAND)

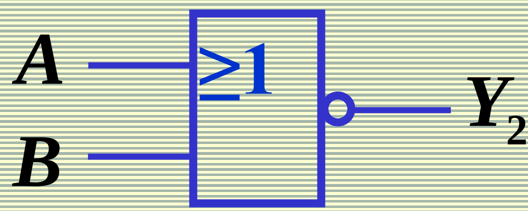
$$Y_1 = \overline{AB}$$



(2) 或非逻辑

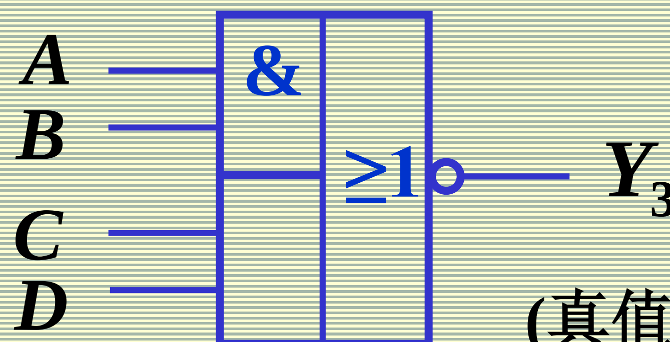
(NOR)

$$Y_2 = \overline{A + B}$$



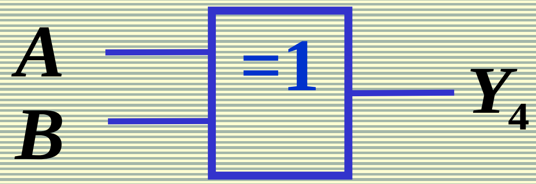
(3) 与或非逻辑

$$Y_3 = \overline{AB + CD}$$



(真值表略)

(4) 异或逻辑 (XOR)



A	B	Y_4
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$Y_4 = A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$$

原变量

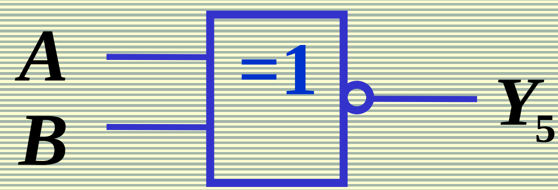
反变量

(5) 同或逻辑 (异或非) (XNOR)

$$Y_5 = \overline{A \oplus B}$$

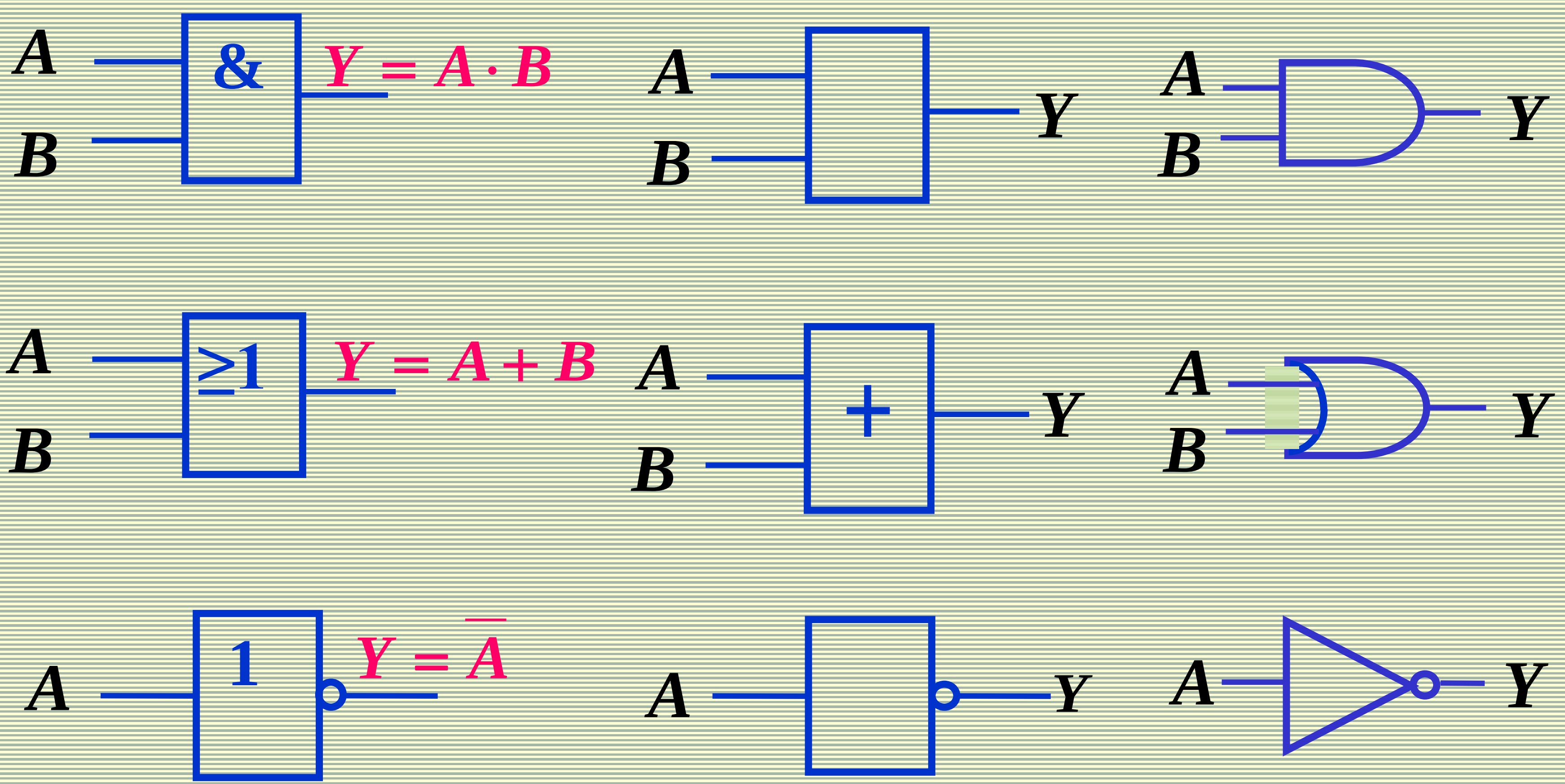
$$= \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

$$= A \odot B$$

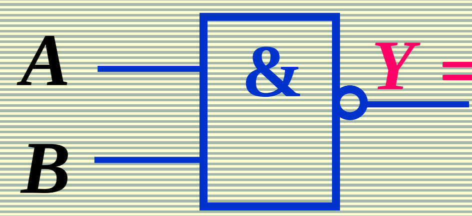


3. 逻辑符号对照

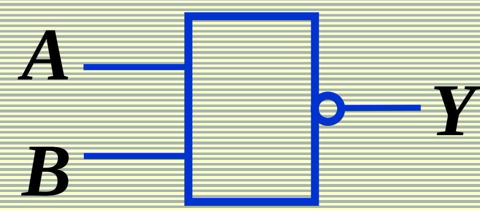
国标符号　　曾用符号　　美国符号

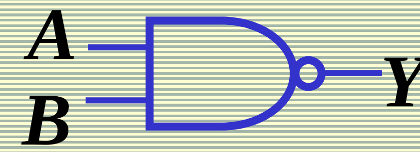


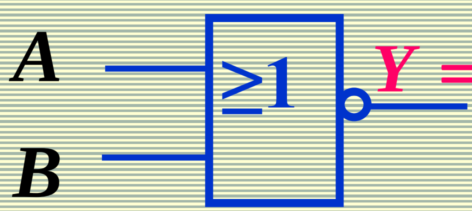
国标符号 曾用符号 美国符号



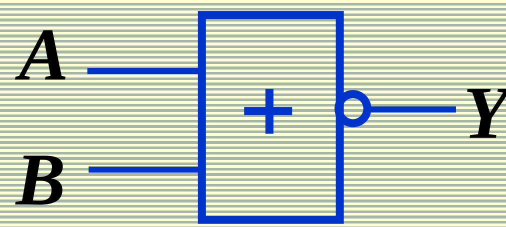
$Y=\overline{A \cdot B}$

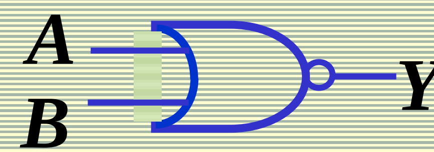


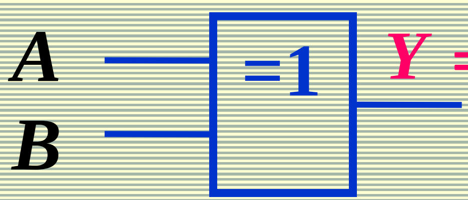




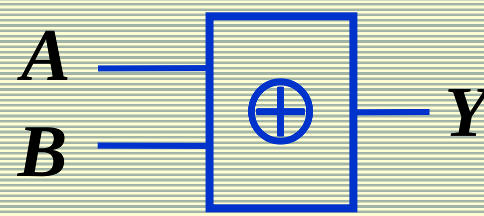
$Y=\overline{A+B}$

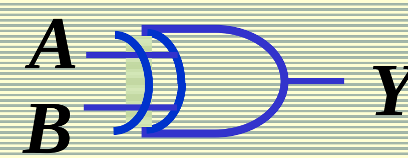






$Y=A \oplus B$





1.1.2 公式和定理

一、 常量之间的关系(常量：0 和 1)

与： $0 \cdot 0 = 0$ 或： $1 + 1 = 1$ 非： $\overline{0} = 1$

$0 \cdot 1 = 0$ $1 + 0 = 1$ $\overline{1} = 0$

$1 \cdot 1 = 1$ $0 + 0 = 0$

二、变量和常量的关系(变量：A、B、C...)

与： $A \cdot 1 = A$ 或： $A + 0 = A$ 非： $A \cdot \overline{A} = 0$

$A \cdot 0 = 0$ $A + 1 = 1$ $A + \overline{A} = 1$

三、与普通代数相似的定理

交换律 $A \cdot B = B \cdot A$ $A + B = B + A$

结合律 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$(A + B) + C = A + (B + C)$

分配律 $A(B + C) = AB + AC$

$A + BC = (A + B)(A + C)$

与普通代数不同，可将或运算变为两个因式乘积。

与普通代数相同，可将多个因式相乘直接展开

四、逻辑代数的一些特殊定理

同一律（重叠律） $A \cdot A = A$ $\quad A + A = A$

德·摩根定理 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ $\quad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

还原律 $\overline{\overline{A}} = A$

［例 1.1.2］ 证明：德·摩根定理

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$	$A + B$	$\overline{A + B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

相等

相等

五、关于等式的两个重要规则

1. 代入规则： 等式中某一变量都代之以一个逻辑函数，则等式仍然成立。

例如，已知 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$（用函数 $A+C$ 代替 A）

则 $\overline{(A+C)+B}=\overline{A+C}\cdot\overline{B}=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{B}$

2. 反演规则：

将 Y 式中 "." 换成 "+"，"+" 换成 "."
"0" 换成 "1"，"1" 换成 "0"
原变量换成反变量，反变量换成原变量 $\Rightarrow \overline{Y}$

注意：
1. 保持原运算顺序不变
2. 不属于单个变量上的非号保留

反演规则的应用：求逻辑函数的反函数

将 Y 式中 “.”换成 “+”,“+”换成 “.”
“0”换成 “1”,“1”换成 “0”
原变量换成反变量，反变量换成原变量

$\Rightarrow \overline{Y}$

例如：已知 $Y_1 = A(B+C)+CD$

则 $\overline{Y_1} = (\overline{A}+\overline{B}\,\overline{C})(\overline{C}+\overline{D})$

注意运算顺序

已知 $Y_2 = \overline{\overline{A\overline{B}+C}+D}+C$

则 $\overline{Y_2} = \overline{\overline{(\overline{A}+B)\cdot\overline{C}}\cdot\overline{D}}\cdot\overline{C}$

不属于单个变量上的反号应保留

六、若干常用公式

$$(1)\quad AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A$$

$$(2)\quad A + AB = A(1 + B) = A \xrightarrow{\text{推广}} A + A(\qquad) = A$$

$$(3)\quad A + \overline{A}B = (A + \overline{A})(A + B) = A + B$$

$$(4)\quad AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

$$\xrightarrow{\text{推广}} AB + \overline{A}C + BC(\qquad) = AB + \overline{A}C$$

$$(5)\quad \overline{A\overline{B} + \overline{A}B} = \overline{A}\,\overline{B} + AB$$